Ισοπλευρικά σύνολα σε απειροδιάστατους χώρους Banach

Γιώργος Βασιλειάδης

Ορισμός 1. Έστω χώρος $(X, \|\cdot\|)$ με νόρμα και $\lambda > 0$. Ένα $S \subseteq X$ ονομάζεται λ-ισοπλευρικό σύνολο αν είναι $\|x - y\| = \lambda \; \forall x, y \in S, x \neq y$.

Σε χώρους με νόρμα πεπερασμένης διάστασης έχει δοθεί ο ακόλουθος ορισμός, τον οποίο και γενικεύουμε:

Ορισμός 2. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Ένα $S \subseteq X$ ονομάζεται <u>αντιποδικό</u> αν $\forall x, y \in S, x \neq y$ υπάρχει $f \in X^* : f(x) < f(y)$ και $f(x) \leq f(z) \leq f(y) \forall z \in S$.

Είναι γνωστό από τους Danzer και Grünbaum ότι η μέγιστη πληθικότητα ενός αντιποδικού συνόλου S στον $\mathbb{R}^n$ είναι 2^n και αυτή επιτυγχάνεται μόνο στην περίπτωση όπου το S είναι το σύνολο των κορυφών ενός n-διάστατου παραλληλότοπου.

Το αποτέλεσμα που ακολουθεί αποδείχθηκε από το (C.M.Petty) για χώρους πεπερασμένης διάστασης:

Πρόταση. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $S \subseteq X$ ισοπλευρικό σύνολο. Τότε το S είναι <u>αντιποδικό</u>.*

Απόδειξη. Έστω $x, y \in S, x \neq y$. Υποθέτουμε ότι το S είναι λ-ισοπλευρικό. Από το Θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $f \in X^*, \|f\| = 1$ ώστε

$$f(y - x) = \|y - x\| = \lambda > 0.$$

Τότε $f(x) < f(y)$ και $f(y) = sup\{f(z) : z \in B(x, \lambda)\}$. Άρα το f είναι συναρτησοειδές στήριξης της $B(x, \lambda)$ στο y και $f(z) \leq f(y) \, \forall z \in S$.
Επίσης για $g = -f$ έχουμε

$$g(x - y) = f(y - x) = \|y - x\| > 0$$

και $\|g\| = 1$, οπότε παρόμοια το g είναι συναρτησοειδές στήριξης της $B(y, \lambda)$ στο x και $g(z) \leq g(x) \, \forall z \in S$.
Άρα $f(x) \leq f(z) \leq f(y) \, \forall z \in S$ και το σύνολο S είναι αντιποδικό. □

Θεώρημα. *(C.M.Petty)*
Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης και $S \subseteq X$ αντιποδικό σύνολο. Τότε υπάρχει ισοδύναμη νόρμα $|||\cdot|||$ στον X, ώστε το S να είναι ισοπλευρικό σύνολο στον $(X, |||\cdot|||)$.

Θα γενικεύσουμε το Θεώρημα του C.M.Petty σε απειροδιάστατους χώρους.

Ορισμός 3. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Ένα $S \subseteq X$ ονομάζεται φραγμένο και διαχωρισμένο αντιποδικό σύνολο, αν υπάρχουν σταθερές $c, d > 0$ ώστε:
(i) $S \subseteq B(0, c)$
(ii) $\forall x, y \in S, x \neq y$ υπάρχει $f \in B_{X^*}$ ώστε $0 < d \leq f(y) - f(x)$ και $f(x) \leq f(z) \leq f(y) \, \forall z \in S$.

<u>*Παρατηρήσεις.*</u> 1. Κάθε ισοπλευρικό σύνολο σε χώρο με νόρμα είναι φραγμένο και διαχωρισμένο αντιποδικό σύνολο.

2. Ένα διορθογώνιο σύστημα $(x_\gamma, x_\gamma{}^*) \in X \times X^*$ σε χώρο με νόρμα δίνει αντιποδικό σύνολο.
Πράγματι, τότε έχουμε:
$$x_{\gamma_1}{}^*(x_{\gamma_2}) = \delta_{\gamma_1\gamma_2} \, \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma.$$
Αν $\gamma_1 \neq \gamma_2$,είναι
$$0 = x_{\gamma_1}{}^*(x_{\gamma_2}) \leq x_{\gamma_1}{}^*(x_\gamma) \leq x_{\gamma_1}{}^*(x_{\gamma_1}) = 1 \, \forall \gamma \in \Gamma.$$

3. Έστω $\{x_\gamma; f_\gamma\}$ ένα φραγμένο διορθογώνιο σύστημα στον X, δηλ. υπάρχει $M > 0$ ώστε
$$\|x_\gamma\| \cdot \|f_\gamma\| \leq M \, \forall \gamma \in \Gamma.$$
Μπορώ τότε να θέσω $g_\gamma = \frac{f_\gamma}{\|f_\gamma\|}, \gamma \in \Gamma$ και $y_\gamma = x_\gamma \cdot \|f_\gamma\|, \gamma \in \Gamma$ οπότε το διορθογώνιο σύστημα $\{y_\gamma; g_\gamma\}$ δίνει $\{y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ φραγμένο και διαχωρισμένο αντιποδικό σύνολο.

Θεώρημα. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $S \subseteq X$ φραγμένο και διαχωρισμένο αντιποδικό σύνολο. Τότε υπάρχει ισοδύναμη νόρμα $|||\cdot|||$ στον X, ώστε το S να είναι ισοπλευρικό σύνολο στον $(X, |||\cdot|||)$.*
(Αν οι σταθερές του S είναι c, d τότε η Banach-Mazur απόσταση των δύο νορμών είναι $\leq \frac{2c}{d}$).

Απόδειξη. Θέτουμε

$$K = \overline{conv}(d \cdot B_x \cup \{x - y : x, y \in S\}).$$

Το K είναι κλειστό (φραγμένο), κυρτό και συμμετρικό σύνολο με $0 \in int(K)$, επομένως το συναρτησοειδές Minkowski ορίζει μια νόρμα

$$\|x\|_K = inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}$$

και η μπάλα του χώρου $(X, \|\cdot\|_K)$ είναι ακριβώς το σύνολο K. Για $x, y \in S, x \neq y$ υπάρχει $f \in B_{X^*}$ ώστε:

$$d \leq f(y) - f(x) \leq \|f\|\|x - y\| \leq 2c$$

επομένως $d \cdot B_X \subseteq K \subseteq 2c \cdot B_X$ και έπεται ότι η Banach-Mazur απόσταση των δύο νορμών είναι $\leq \frac{2c}{d}$.
Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι αν $x, y \in S$ με $x \neq y$ τότε $x - y \in \partial K \Leftrightarrow \|x - y\|_K = 1$ (επομένως το S είναι 1-ισοπλευρικό στη $\|\cdot\|_K$).
Έστω λοιπόν $x, y \in S$ με $x \neq y$. Τότε υπάρχει $f \in B_{X^*}$ με $d \leq f(y) - f(x)$ και $f(x) \leq f(z) \leq f(y) \forall z \in S$.
Τότε για $z_1, z_2 \in S$ είναι

$$f(z_1 - z_2) \leq f(y - x).$$

Επίσης αν $z \in d \cdot B_X$, τότε

$$f(z) \leq |f(z)| \leq \|z\| \leq d \leq f(y - x)$$

και άρα το f είναι συναρτησοειδές στήριξης του K στο σημείο $y - x$, συνεπώς $y - x \in \partial K$. □

Πόρισμα. *Έστω $\{x_\gamma; f_\gamma\}$ ένα φραγμένο διορθογώνιο σύστημα στον $(X, \|\cdot\|)$ με $\|f_\gamma\| = 1, \gamma \in \Gamma$ και $\|x_\gamma\| \leq c, \gamma \in \Gamma$. Τότε υπάρχει ισοδύναμη νόρμα $|||\cdot|||$ στον X με Banach-Mazur απόσταση από την αρχική $\leq 2c$ $(c \geq 1)$, ώστε το συνολο $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ να είναι 1-ισοπλευρικό στον $(X, |||\cdot|||)$.*

Αυτό το απέδειξε ο K.J.Swanepoel στην περίπτωση όπου ο χώρος είναι διαχωρίσιμος, παίρνοντας ισοδύναμη νόρμα με Banach-Mazur απόσταση από την αρχική $\leq 2+\varepsilon$.
Χρησιμοποιώντας (στη διαχωρίσιμη περίπτωση) ένα αποτέλεσμα του Day για την ύπαρξη άπειρου αριθμήσιμου Auerbach συστήματος, μπορούμε να πάρουμε ισοδύναμη νόρμα με Banach-Mazur απόσταση ≤ 2 από την αρχική.

Παρατήρηση. Αν ο $(X, \|\cdot\|)$ περιέχει ισομορφικά τον ℓ^1 ή τον c_0, τότε $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστός υπόχωρος Y του X και ισοδύναμη νόρμα στον Y ώστε:
(i) $d((Y, |||\cdot|||), (Y, \|\cdot\|)) \leq 1+\varepsilon$ και
(ii) Ο $(Y, |||\cdot|||)$ περιέχει άπειρο ισοπλευρικό σύνολο.
Αυτό συμβαίνει λόγω της ιδιότητας της μη-παραμόρφωσης (distortion) της νόρμας του c_0 και του ℓ^1 (ο χώρος θα περιέχει αντίτυπα του c_0 ή του ℓ^1 με μικρή Banach-Mazur απόσταση από την αρχική νόρμα).

Παρατήρηση. Υπάρχουν κλάσεις μη διαχωρίσιμων χώρων Banach οι οποίοι έχουν διορθογώνια συστήματα:

1. Οι WCG χώροι και οι γενικεύσεις τους (μάλιστα έχουν M-βάσεις)
2. Οι χώροι που είναι representable (π.χ. οι δυϊκοί διαχωρίσιμων χώρων Banach, οι οποίοι δεν είναι διαχωρίσιμοι)
3. Αν ο X είναι μη διαχωρίσιμος χώρος Banach και είναι ισόμορφος με δυϊκό χώρο Banach, τότε δέχεται υπεραριθμήσιμο διορθογώνιο σύστημα.

Σημειώνουμε ότι είναι συνεπές στην ZFC να υποθέσουμε ότι κάθε μη διαχωρίσιμος χώρος Banach δέχεται υπεραριθμήσιμο διορθογώνιο σύστημα.

Έστω K συμπαγής και Hausdorff τοπολογικός χώρος. Μια συνεχής συνάρτηση $f : K \to [0,1]$ λέγεται συνάρτηση Urysohn, αν $f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ και $f^{-1}(\{1\}) \neq \emptyset$.
Αν $A, B \neq \emptyset$ κλειστά και ξένα υποσύνολα του K τότε υπάρχει (από το Λήμμα Urysohn) μια συνάρτηση Urysohn $f : K \to [0,1]$ με $f/A = 1$ και $f/B = 0$.
Αν επιπλέον τα A, B είναι G_δ σύνολα, τότε υπάρχει συνάρτηση Urysohn με $f^{-1}(\{1\}) = A$ και $f^{-1}(\{0\}) = B$.

Παρατηρήσεις. 1. Ένας συμπαγής χώρος K είναι κληρονομικά Lindelöf αν και μόνο αν είναι perfectly normal (ισοδύναμα κάθε κλειστό υποσύνολό του είναι G_δ-σύνολο).

2. Έστω K συμπαγής χώρος και f, g συναρτήσεις Urysohn. Τότε είναι:
$\|f-g\|_\infty \leq 1$ και
$\|f-g\|_\infty = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(\{1\}) \cap g^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ ή $g^{-1}(\{1\}) \cap f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$.

Ορίζουμε ακολούθως μια ασθενή έννοια ανεξαρτησίας:

Ορισμός 4. Έστω S ένα σύνολο και $(A_\alpha, B_\alpha)_{\alpha \in I}$ μια οικογένεια μη κενών υποσυνόλων του S ώστε:
(i) $A_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset, \alpha \in I$ και
(ii) $\forall a, b \in I\ a \neq b$ ισχύει είτε $A_\alpha \cap B_b \neq \emptyset$ ή $A_b \cap B_\alpha \neq \emptyset$.

Λήμμα. *Έστω K συμπαγής και Hausdorff τοπολογικός χώρος και $\mathcal{F} \subseteq C(K)$ μια οικογένεια συναρτήσεων Urysohn. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το σύνολο $\mathcal{F}$ είναι ισοπλευρικό στον $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ (δηλ. $\|f-g\|_\infty = 1 \forall f, g \in \mathcal{F}, f \neq g$).*
2. *Η οικογένεια ξένων κλειστών συνόλων $(f^{-1}(\{1\}), f^{-1}(\{0\}))$ είναι "ανεξάρτητη".*

Πρόταση. *Έστω K συμπαγής και Hausdorff τοπολογικός χώρος και $(A_\alpha, B_\alpha)_{\alpha \in I}$ μια "ανεξάρτητη' οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του K. Θεωρούμε για $\alpha \in A$ μια συνάρτηση Urysohn $f_\alpha : K \to [0,1]$ με $f_\alpha / A_\alpha = 1$ και $f_\alpha / B_\alpha = 0$. Τότε η οικογένεια συναρτήσεων $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ είναι ισοπλευρική στον $C(K)$.*

Έστω K συμπαγής και Hausdorff τοπολογικός χώρος και $\mathcal{C}$ μια οικογένεια ανοικτών-κλειστών υποσυνόλων του K με $\emptyset \neq A \neq K, \forall A \in \mathcal{C}$. Τότε η οικογένεια $\{(A, K \setminus A) : A \in \mathcal{C}\}$ είναι "ανεξάρτητη' και επομένως η οικογένεια συναρτήσεων $\{f_A = \chi_A : A \in \mathcal{C}\}$ είναι ισοπλευρική στον $C(K)$.

Πόρισμα. *Έστω K συμπαγής και Hausdorff, ολικά μη συνεκτικός χώρος. Τότε υπάρχει ισοπλευρικό σύνολο $\mathcal{F} \subseteq C(K)$ με $|\mathcal{F}| = w(K)$.*
($\mathcal{F} = \{\chi_V : V \subseteq K, V \in \mathcal{B}\}$)

Ορισμός 5. Μια οικογένεια $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ στον τοπολογικό χώρο X ονομάζεται
<u>δεξιά διαχωρισμένη</u>, αν $x_\alpha \notin \overline{\{x_\beta : \alpha < \beta < \omega_1\}}$, $\forall \alpha < \omega_1$.

Πρόταση. *Ένας τοπολογικός χώρος X είναι κληρονομικά Lindelöf αν και μόνο αν ο X δεν περιέχει δεξιά διαχωρισμένη οικογένεια.*

Πρόταση. *Έστω K συμπαγής και Hausdorff τοπολογικός χώρος, ο οποίος δεν είναι κληρονομικά Lindelöf. Τότε ο $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ περιέχει υπεραριθμήσιμο ισοπλευρικό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω $\{t_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq K$ μια δεξιά διαχωρισμένη οικογένεια. Θέτουμε

$$H_\alpha = \{t_\alpha\} \; F_\alpha = \overline{\{t_\beta : \alpha < \beta < \omega_1\}}$$

με $H_\alpha \cap F_\alpha = \emptyset, \forall \alpha < \omega_1$ και για $\alpha < \beta < \omega_1$ είναι $t_\beta \in F_\alpha$. Η οικογένεια $(H_\alpha, F_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ είναι "ανεξάρτητη".

□

Πρόταση. *Έστω K συμπαγής και Hausdorff τοπολογικός χώρος, ο οποίος δεν είναι κληρονομικά διαχωρίσιμος. Τότε ο $C(K)$ περιέχει υπεραριθμήσιμο ισοπλευρικό σύνολο.*

Απόδειξη. Υπάρχει μια οικογένεια $(t_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ αριστερά διαχωρισμένη και θέτουμε:
$F_\alpha = \overline{\{t_\beta : \beta < \alpha\}}, \alpha < \omega_1$ κλειστό, μη κενό με $t_\beta \in F_\alpha$, $\beta < \alpha$
και η οικογένεια $(\{t_\alpha\}, F_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ είναι "ανεξάρτητη".

□

Πρόταση. *Αν X μη διαχωρίσιμος χώρος, τότε η μπάλα του X^* (B_{X^*}, w^*) δεν είναι κληρονομικά Lindelöf και επομένως ο χώρος Banach $C(B_{X^*})$ περιέχει υπεραριθμήσιμο ισοπλευρικό σύνολο.*

Ερωτήματα:

1. Έστω ο χώρος $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$, K συμπαγής και μη μετρικοποιήσιμος. Υπάρχει $S \subseteq C(K)$ ισοπλευρικό σύνολο στη $\|\cdot\|_\infty$;

2. Υπάρχει χώρος $(X, \|\cdot\|_\infty)$ μη διαχωρίσιμος, ώστε κάθε αντιποδικό, φραγμένο και διαχωρισμένο σύνολο είναι το πολύ αριθμήσιμο;